حل تحلیلی کمانش ورق‌های ساندویچی هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک در دو حالت مدار باز و بسته *

محمدعلی قاسم‌آبادیان [۱]　　　　علیرضا سعیدی [۲]

چکیده *در مقالهٔ حاضر، بر پایهٔ تئوری کلاسیک ورق، کمانش ورق‌های مستطیلی هدفمند کوپله شده با لایه‌های پیزوالکتریک تحلیل شده است. با فرض این‌که توزیع عرضی تابع پتانسیل الکتریکی ترکیبی از دو تابع خطی و درجه دوم باشد، معادلات تعادل برای تحلیل کمانش ورق با لایه‌های پیزوالکتریک حاصل شد. معادلهٔ ماکسول و همهٔ شرایط مرزی شامل شرایط روی سطوح بالا و پایین ورق برای مدار باز و بسته و شرایط مرزی لوی ارضا شدند. نتایج نشان داد که بار بحرانی کمانش در حالت مدار باز بیشتر از مدار بسته است. هم‌چنین بار بحرانی کمانش با افزایش ضخامت لایهٔ پیزوالکتریک افزایش می‌یابد.*

واژه‌های کلیدی کمانش، پیزوالکتریک، ورق مستطیلی، مدار باز، مدار بسته، مادهٔ هدفمند.

Analytical Solution for Buckling of FGM Plates with Integrated Piezoelectric Layers under Open and Closed Circuit Conditions

M.A. Ghasemabadian　　　　A.R. Saidi

Abstract *In the present paper, based on the classical plate theory, buckling analysis of piezoelectric coupled FGM rectangular plates is investigated. By assuming the transverse distribution of electric potential to be a combination of a parabolic and a linear function of thickness, the equiblirium equations for buckling analysis of plate with surface bonded piezoelectric layers are established. The Maxwell's equation and all boundary conditions including the conditions on the top and bottom surfaces of the plate for closed and open circuited and Levy type of boundary conditions are satisfied. Numerical results show that, the critical buckling load for open circuit is more than that of closed circuit. Furthermore, the critical buckling loads increase by increasing the thickness of piezoelectric layers.*

Key Words Buckling, piezoelectric, rectangular plate, open circuit, closed circuit, functionally graded material.

★تاریخ دریافت مقاله ۹۲/۸/۲۸ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/۷/۷ می‌باشد.

(۱) دانشجوی دکتری، گروه مکانیک، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

(۲) نویسندهٔ مسئول: استاد، گروه مکانیک، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان. saidi@mail.uk.ac.ir

مقدمه

پیشرفت‌های اخیر در زمینه علم مواد، گسترهٔ وسیعی از مواد را در اختیار محققان برای انتخاب مواد مورد نیازشان با توجه به ویژگی‌های مورد نظر قرار داده است؛ به طوری که اطلاع از ویژگی‌های مادهٔ مورد نیاز و ویژگی‌های مواد موجود، انتخابی درست و مطمئن را تضمین می‌کند. از سوی دیگر تحلیل سازه‌های ساخته شده از این مواد اهمیتی دو چندان دارد، آن چنان که بخش قابل‌توجهی از تلاش و توجه محققان، به آنالیز و تحلیل این مواد در سازه‌های پر کاربرد معطوف شده است. مواد هدفمند و پیزوالکتریک دو دسته از این مواد هستند که به‌علت ویژگی‌های منحصر به فردشان علی‌رغم نو بودن آنها، تاکنون مورد بررسی تعداد زیادی از پژوهشگران بوده‌اند.

جواهری و اسلامی در تحلیل کمانش ورق‌های ساخته شده از مواد هدفمند، کمانش ورق تحت بارگذاری‌های حرارتی [1] و مکانیکی [2] را براساس تئوری کلاسیک با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده بررسی کردند. آنها [3] هم‌چنین کمانش حرارتی ورق ضخیم را براساس تئوری برشی مرتبهٔ سوم با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده انجام دادند و درجه حرارت بحرانی کمانش را به‌صورت حل دقیق به‌دست آوردند. وو [4] کمانش ورق تحت بارگذاری حرارتی را برای شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده براساس تئوری برشی مرتبهٔ اول بررسی کرد. شریعت و اسلامی [5] تحلیل کمانش ورق تحت بارگذاری مکانیکی را براساس تئوری برشی مرتبهٔ اول ارائه دادند. آن‌ها [6] همچنین حل بسته بار بحرانی کمانش را برای ورق با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده و براساس تئوری برشی مرتبهٔ سوم برای مادهٔ هدفمند با تغییرات خطی و بارگذاری مکانیکی و حرارتی، ارائه دادند. فریرا [7] و همکارانش براساس تئوری برشی مرتبهٔ سوم و استفاده از روش بدون المان، تغییرشکل استاتیکی ورق‌های مستطیلی ضخیم تحت بارگذاری عرضی و شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده را به‌دست آوردند. محمدی و همکاران، کمانش ورق‌های تحت بارگذاری مکانیکی یکنواخت را براساس تئوری‌های کلاسیک [8] و برشی مرتبهٔ اول [9] انجام دادند.

هم‌چنین بداغی و سعیدی [10] نیز با در نظر گرفتن شرایط مرزی لوی و بر پایه تئوری مرتبهٔ سوم برشی تحلیل کمانش ورق مستطیلی را ارائه دادند. تحلیل جامعی از مواد هدفمند متقارن نسبت به صفحهٔ میانی ورق به کارهای زنکور [11] بر می‌گردد. کیانی و همکاران [12] نیز براساس تئوری مرتبهٔ اول برشی کمانش ورق مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند متقارن بر روی بستر الاستیک را ارائه دادند.

در زمینهٔ مطالعات مربوط به کمانش ورق‌های پیزوالکتریک، چاندراشخرا و باتیا [13]، براساس تئوری مرتبهٔ اول برشی کنترل فعال کمانش ورق کامپوزیت با مدل‌سازی اجزای محدود را انجام دادند. باترا و جنگ [14] تأثیر شکل و اندازهٔ محرک‌های پیزوسرامیک را بر افزایش اندازهٔ بار کمانش بررسی کردند. وارلیس و ساراوونز [15] نیز پاسخ پیش کمانش و پس کمانش ورق‌های کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک به‌عنوان محرک و حسگر را بررسی کردند. تحلیل دینامیکی کمانش ورق‌های چند لایه با لایه‌های پیزوالکتریک تحت بارهای الکترومکانیکی و حرارتی در دو حالت خواص مستقل [16] و وابسته به دما [17] توسط شرعیات انجام شد. تحلیل سه‌بعدی کمانش حرارتی ورق‌های پیزوالکتریک کامپوزیت با روش لایه محدود نیز توسط لی و اخرس [18] انجام پذیرفت. در زمینهٔ کارهای تحلیلی، یانگ [19]، معادلات مربوط به کمانش ورق خالص پیزوالکتریک را به‌دست آورد. شن [20] پس کمانش حرارتی ورق مستطیلی لایه‌ای با محرک‌های پیزوالکتریک را برای شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده و تحت بارهای حرارتی و الکتریکی ارائه داد. علاوه بر آن وی [21] مقایسه‌ای بین تحلیل پس کمانش فشاری در محیط حرارتی و

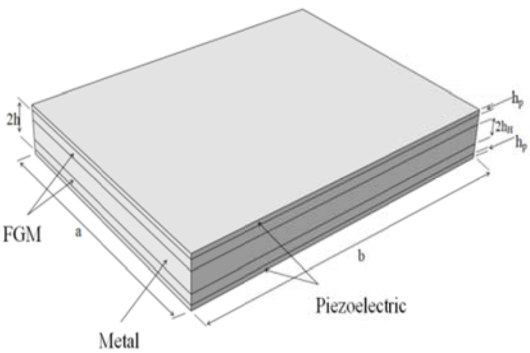
پس کمانش تحت افزایش دمای محدود برای ورق کامپوزیت با لبه‌های تکیه‌گاه ساده و لایه‌های پیزوالکتریک بر پایه تئوری مرتبهٔ سوم ارائه داد. تحلیل پس کمانش ورق‌های لایه‌ای با محرک‌های پیزوالکتریک تحت شرایط بارگذاری پیچیدهٔ حرارتی مکانیکی الکتریکی نیز توسط وی [22, 23] انجام شد. کاپویرا و آچاری [24] با استفاده از تئوری زیگزاگ، کمانش ورق‌های پیزوالکتریک هیبریدی را بررسی کردند. با استفاده از فرمول‌های فضای حالت، کمانش ورق لایه‌ای مستطیلی پیزوالکتریک توسط کیم و لی [25] انجام پذیرفت.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود هیچ‌گونه حل تحلیلی برای آنالیز کمانش ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمتد با لایه‌های پیزوالکتریک، مبتنی بر ارضای حالت مدار باز و بسته و هم‌چنین ارضای معادله ماکسول، حتی برای ورق‌های با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده وجود ندارد. به‌دلیل اهمیت مطالعهٔ رفتار کمانشی ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند و پیزوالکتریک، در این مقاله، برای اولین بار حل تحلیلی برای یافتن بار بحرانی کمانش ورق‌های نازک چند لایهٔ ساندویچی هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک تحت شرایط مرزی لوی و حالت مدار باز و بستهٔ الکتریکی ارائه شده است.

معادلات تعادل و پایداری براساس ویژگی‌های مادهٔ هدفمند متقارن نسبت به وسط ضخامت ورق و هم‌چنین معادلهٔ ماکسول در حوزهٔ متغیرهای الکتریکی، استخراج شده‌اند. معادلات حاکم بر پایداری ورق ذکر شده، تحت بارگذاری ثابت درون صفحه‌ای به‌کمک یک روش تحلیلی حل شده است. با اعمال شرایط مرزی گوناگون متقارن و نامتقارن لوی و صفر قرار دادن دترمینان ضرایب مجهول، مقادیر ویژه‌ای به دست می‌آید که کمترین آن‌ها بار کمانش بحرانی می‌باشد.

هندسهٔ ورق

ورق مستطیلی نشان داده شده در شکل (۱) به ابعاد a و b و ضخامت کلی H را در نظر بگیرید. جنس هستهٔ مرکزی ورق مورد بررسی فلز خالص به ضخامت $2h_m$ می‌باشد که در بالا و پایین آن مادهٔ هدفمندی که نسبت به صفحهٔ میانی ورق دارای تقارن می‌باشد در نظر گرفته شده است. در بالا و پایین ورق نیز لایه‌های پیزوالکتریک به ضخامت h_p قرار گرفته‌اند.



شکل ۱ مختصات ورق پنج لایه

تغییرات خواص در مادهٔ هدفمند در راستای ضخامت به‌صورت زیر می‌باشد [11]:

$$\begin{cases} E^t(z) = E_c + (E_m - E_c)\left(\dfrac{-z+h}{h-h_m}\right)^n & h_m \le z \le h \\ E^b(z) = E_c + (E_m - E_c)\left(\dfrac{z+h}{h-h_m}\right)^n & -h \le z \le -h_m \\ E^m = E_m & -h_m \le z \le h_m \end{cases} \qquad (۱)$$

که در آن $E(z)$ مدول الاستیسیته ورق در راستای ضخامت آن می‌باشد. زیرنویس‌های m و c به‌ترتیب به قسمت فلزی و سرامیکی ورق اشاره دارند. پارامتر

n نشان دهنده اندیس مادهٔ هدفمند می‌باشد کـه تغییـر در آن باعث تغییر خواص ماده می‌شود. با توجه به کـم بودن تغییرات ضریب پواسون این کمیت ثابـت فـرض مـی‌شـود. بـالانویس‌هـای b ،t و m بـه‌ترتیـب بـه لایه‌های بالا، پـایین و هسـته در مـادهٔ هدفمنـد اشـاره دارند. متقارن بودن مادهٔ هدفمند نسبت به صفحهٔ میانی بدان معناست که مادهٔ هدفمند در مرز با لایه فلز دارای ویژگی فلز و در مرز بـا مـاده پیزوالکتریـک، سـرامیک می‌باشد. از آن‌جا که مادهٔ هدفمنـد همسـان‌گـرد اسـت میدان تنش آن به‌صورت زیر می‌باشد [26]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{E(z)}{1-\nu^2} & \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & 0\\ \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & \frac{E(z)}{1-\nu^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۲)$$

از سوی دیگر اثر متقابل بین میدان‌های الکتریکـی و مکانیکی در مواد پیزوالکتریک با روابـط خطـی زیـر بیان می‌شوند [26]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma^p_{xx}\\ \sigma^p_{yy}\\ \sigma^p_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{C}^E_{11} & \bar{C}^E_{12} & 0\\ \bar{C}^E_{12} & \bar{C}^E_{11} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\bar{C}^E_{11}-\bar{C}^E_{12}\right)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & \bar{e}_{31}\\ 0 & 0 & \bar{e}_{31}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix} \qquad (۳)$$

$$\begin{Bmatrix}D_x\\ D_y\\ D_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{31} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\Xi_{11} & 0 & 0\\ 0 & \Xi_{11} & 0\\ 0 & 0 & \bar{\Xi}_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix} \qquad (٤)$$

که در آن $\{E\}$، $\{D\}$، $[\Xi]$، $[C]$ و $[e]$ به‌ترتیب بـردار میدان الکتریکی، بردار تغییر مکان الکتریکـی، مـاتریس گذردهی دی الکتریک، ماتریس ثوابـت الاسـتیک لایـهٔ پیزوالکتریک و ماتریس کوپلینگ خـواص الکتریکـی و مکانیکی می‌باشند. بالانویس p هم بیانگر اثر این میدان تنش بر روی لایهٔ پیزوالکتریک می‌باشد.

میدان‌های الکتریکی و مکانیکی

براسـاس تئـوری کلاسـیک ورق، میـدان تغییـر مکـان به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [8]:

$$\begin{Bmatrix}u_1(x,y,z)\\ u_2(x,y,z)\\ u_3(x,y,z)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u(x,y)\\ v(x,y)\\ w(x,y)\end{Bmatrix}-z\begin{Bmatrix}w_{,x}\\ w_{,y}\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (۵)$$

u_1 و u_2 و u_3 به‌ترتیب مؤلفه‌های تغییـر مکـان در راسـتای x، y و z در هـر نقطـه از صـفحه بـه فاصلهٔ z از صفحهٔ میـانی ورق هسـتند. u ، v و w مؤلفه‌هـای تغییـر مکـان صـفحهٔ میـانی ورق برحسـب متغیرهــای x و y هســتند و انــدیس (,) بیــانگر مشـتق‌گیـری نسـبت بـه مختصـات کـارتزین مربـوط می‌باشد.

مؤلفه‌های کرنش با استفاده از فرضیات فون کارمن برای روابط غیرخطی کرنش تغییـر مکـان و هـم‌چنـین میدان پتانسیل الکتریکی که در راسـتای ضـخامت ورق به‌صورت مرتبه دوم از مؤلفهٔ تغییر مکان عرضی فـرض می‌شود به‌صورت زیر نوشته می‌شوند [8, 27]:

$$\begin{Bmatrix}\bar{\varepsilon}_{xx}\\ \bar{\varepsilon}_{yy}\\ \bar{\varepsilon}_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u_{,x}+w_{,x}^2/2\\ v_{,y}+w_{,y}^2/2\\ u_{,x}+v_{,y}+w_{,x}w_{,y}\end{Bmatrix}-z\begin{Bmatrix}w_{,xx}\\ w_{,yy}\\ 2w_{,xy}\end{Bmatrix} \qquad (٦.١)$$

$$\phi(x,y,z)=\begin{cases}\left[1-\left(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2\right]\varphi(x,y)+Az+B & h\le z\le h+h_p\\ \left[1-\left(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2\right]\varphi(x,y)+A'z+B' & -h-h_p\le z\le -h\end{cases} \qquad (٦.٢)$$

اگر هر دو سطح هر لایهٔ پیزوالکتریک دارای ولتاژ صفر باشند آن‌گاه شرط الکتریکی مدار بسته و میدان پتانسیل الکتریکی حاکم بر ورق برای این شرط به‌ترتیب به‌صورت زیر نوشته می‌شوند [27]:

$$\phi\Big|_{z=\pm h}=\phi\Big|_{z=\pm(h+h_p)}=0 \qquad (۷.۱)$$

$$\phi(x,y,z)=\begin{cases}\left[1-\left(\dfrac{z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2\right]\varphi(x,y) & h\le z\le h+h_p\\ \left[1-\left(\dfrac{-z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2\right]\varphi(x,y) & -h-h_p\le z\le -h\end{cases} \qquad (۷.۲)$$

و در صورتی که سطح داخلی لایهٔ پیزوالکتریک دارای ولتاژ صفر و سطح خارجی عایق باشد شرط الکتریکی مدار باز برقرار است و میدان پتانسیل الکتریکی مربوط به آن به‌ترتیب به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\phi\Big|_{z=\pm h}=0 \qquad D_z\Big|_{z=\pm(h+h_p)}=0 \qquad (۸.۱)$$

$$\phi(x,y,z)=\left[1-\left(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2+\frac{4(z-h)}{h_p}\right]\varphi(x,y)+\frac{\bar{e}_{31}}{\bar{\Xi}_{33}}[\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+(\kappa_{xx}+\kappa_{yy})(h+h_p)](z-h) \quad h\le z\le h+h_p \qquad (۸.۲)$$

$$\phi(x,y,z)=\left[1-\left(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2-\frac{4(z-h)}{h_p}\right]\varphi(x,y)+\frac{\bar{e}_{31}}{\bar{\Xi}_{33}}[\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}-(\kappa_{xx}+\kappa_{yy})(h+h_p)](z+h) \quad -h-h_p\le z\le -h \qquad (۸.۳)$$

میدان الکتریکی نیز به‌صورت قرینهٔ بردار گرادیان میدان پتانسیل الکتریکی تعریف می‌شود [27]:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi \qquad (۹)$$

با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل سه معادله حاکم بر ورق به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\delta u:\ N_{xx,x}+N_{xy,y}=0\\ &\delta v:\ N_{xy,x}+N_{yy,y}=0\\ &\delta w:\ (N_{xx}w_{,x}+N_{xy}w_{,y}+M_{xx,x}+M_{xy,y})_{,x}\\ &+(N_{xy}w_{,x}+N_{yy}w_{,y}+M_{xy,x}+M_{yy,y})_{,y}=0\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

که در آن (N,M) منتجه‌های تنش به‌صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{aligned}(N_{xx},N_{xy},N_{yy})&=\int_{-h-h_p}^{h+h_p}(\sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{yy})dz\\ (M_{xx},M_{xy},M_{yy})&=\int_{-h-h_p}^{h+h_p}(\sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{yy})z\,dz\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

با جای‌گذاری (٦ و ۳ و ۲) در (۱۱)، منتجه‌های تنش برحسب مؤلفه‌های تغییر مکان حاصل می‌شوند:

$$N_{xx}=A_{11}^T\left(u_{,x}+\frac{w_{,x}^2}{2}\right)+A_{22}^T\left(v_{,y}+\frac{w_{,y}^2}{2}\right) \qquad (۱۲\text{–الف})$$

$$N_{yy}=A_{22}^T\left(u_{,x}+\frac{w_{,x}^2}{2}\right)+A_{11}^T\left(v_{,y}+\frac{w_{,y}^2}{2}\right) \qquad (۱۲\text{–ب})$$

$$N_{xy}=A_{11}^T(u_{,y}+v_{,x}+w_{,x}w_{,y}) \qquad (۱۲\text{–ج})$$

$$M_{xx}=-D_{11}^T w_{,xx}-D_{22}^T w_{,yy}+X^T\varphi \qquad (۱۲\text{–د})$$

$$M_{yy}=-D_{22}^T w_{,xx}-D_{11}^T w_{,yy}+X^T\varphi \qquad (۱۲\text{–ه})$$

$$M_{xy}=-2D_{12}^T w_{,xy} \qquad (۱۲\text{–و})$$

که ثوابت ذکر شده در معادلات (۱۲) در پیوست آورده شده‌اند با در نظر گرفتن معیار همسایگی [8] معادلات تعادل به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}&N_{xx,x}^1+N_{xy,y}^1=0\\ &N_{xy,x}^1+N_{yy,y}^1=0\\ &N_{xx}^0 w_{,xx}^1+2N_{xy}^0 w_{,xy}^1+N_{yy}^0 w_{,yy}^1\\ &+M_{xx,xx}^1+2M_{xy,xy}^1+M_{yy,yy}^1=0\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

که در آن بالانویس‌های ۱ و ۰ به‌ترتیب مربوط به وضعیت تعادل ورق و وضعیت همسایگی آن می‌باشد و ($N^0_{xx}, N^0_{xy}, N^0_{yy}$) می توانند با نیروهای پیش کمانش حاصل از شرایط تعادل جایگزین شوند.

با قرار دادن منتجه‌های نیرو و ممان در (۱۳)، معادلات تعادل برحسب مؤلفه‌های تغییر مکان به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&A^T_{11}u^1_{,xx} + A^T_{22}v^1_{,xy} + A^T_{11}\left(u^1_{,yy} + v^1_{,xy}\right) = 0 \\
&A^T_{11}\left(u^1_{,xy} + v^1_{,xx}\right) + A^T_{22}u^1_{,xy} + A^T_{11}v^1_{,yy} = 0 \\
&N^0_{xx}w^1_{,xx} + 2N^0_{xy}w^1_{,xy} + N^0_{yy}w^1_{,yy} \\
&-D^T_{11}w^1_{,xxxx} - 2D^T_{22}w^1_{,xxyy} - D^T_{11}w^1_{,yyyy} \\
&-4D^T_{12}w^1_{,xxyy} + X^T\left(\varphi^1_{,xx} + \varphi^1_{,yy}\right) = 0
\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

باید توجه داشت از آنجا که مادهٔ هدفمند و پیزوالکتریک در نظر گرفته شده، نسبت به صفحهٔ میانی ورق دارای تقارن هستند، دو معادلهٔ اول (۱۴) که برحسب مؤلفه‌های تغییر مکان درون صفحه‌ای u و v هستند از معادلهٔ سوم که برحسب مؤلفهٔ تغییر مکان عرضی w و تابع پتانسیل φ می‌باشند جدا می‌شوند و در فرآیند یافتن بار کمانش بحرانی مورد استفاده قرار نمی‌گیرند. با کمی دقت در ضرایب معادلهٔ (۱۴) می‌توان رابطهٔ زیر را یافت:

$$D^T_{11} = D^T_{22} + 2D^T_{12} \qquad (۱۵)$$

با استفاده از این رابطه می‌توان معادلهٔ آخر (۱۴) را به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
&N^0_{xx}w^1_{,xx} + 2N^0_{xy}w^1_{,xy} + N^0_{yy}w^1_{,yy} \\
&-D^T_{11}\nabla^4 w^1 + X^T\nabla^2\varphi^1 = 0
\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

از سوی دیگر مادهٔ پیزوالکتریک در حوزهٔ متغیرهای الکتریکی باید معادلهٔ ماکسول را ارضا نماید:

$$\begin{aligned}
&\int_{h}^{h+h_p}\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)dz + \\
&\int_{-h-h_p}^{-h}\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)dz = 0
\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

که برحسب مؤلفه‌های تغییر مکان به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Theta_1\nabla^2\varphi^1 + \Theta_2\nabla^4 w^1 + \Theta_3\nabla^2 w^1 + \Theta_4\varphi^1 = 0 \qquad (۱۸)$$

معادلات (۱۸ و ۱۶) دو معادلهٔ حاکم بر ورق برحسب w و ϕ می‌باشند. برای حل این معادلات از معادلهٔ (۱۸)، $\nabla^2\varphi$ به‌دست می‌آید و با جای‌گذاری در (۱۶) و ساده‌سازی جبری معادله‌ای برحسب w به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&m_1\nabla^6 w + m_2\nabla^2 w + m_3\nabla^2(N^0_{xx}w^1_{,xx} \\
&+2N^0_{xy}w^1_{,xy} + N^0_{yy}w^1_{,yy}) + N^0_{xx}w^1_{,xx} \\
&+2N^0_{xy}w^1_{,xy} + N^0_{yy}w^1_{,yy} = 0
\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

که ضرایب m_i در پیوست آورده شده‌اند.

شرایط مرزی مکانیکی و الکتریکی

برای ورق مورد نظر فرض می‌شود که دو لبهٔ ورق در راستای y (یعنی $x=0, x=a$) تکیه‌گاه ساده می‌باشد و در ضمن این دو لبه از نظر الکتریکی به زمین وصل شده‌اند و دارای پتانسیل صفر می‌باشند. دو لبهٔ دیگر در راستای x دارای شرایط مرزی دل‌خواه هستند (یعنی تکیه‌گاه ساده، گیردار و آزاد). با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل کل شرایط مرزی مکانیکی به‌صورت زیر حاصل می‌شود: (در سراسر این متن حروف F، S و C به‌ترتیب بیانگر تکیه‌گاه آزاد، ساده و گیردار می‌باشند)

تکیه‌گاه ساده:

$$w = M_{yy} = 0 \quad (۲۰)$$

تکیه‌گاه گیردار

$$w = w_{,y} = 0 \quad (۲۱)$$

تکیه‌گاه آزاد

$$V_y + (N^0_{xy} w^1_{,y} + N^0_{yy} w^1_{,y}) = M_{yy} = 0 \quad (۲۲)$$

که در آن $V_y = 2M^1_{xy,x} + M^1_{yy,y}$ می‌باشد.

علاوه بر شرایط مرزی فوق فرض می‌شود کـه دو لبه ورق در راستای y عایق الکتریکی می‌باشند بنابراین معادلهٔ بقای شار الکتریکی منجر به شـرط مـرزی زیـر می‌شود:

$$\int_{h}^{h+h_p} D_y(x,y,z)dz + \int_{-h-h_p}^{-h} D_y(x,y,z)dz = 0 \quad (۲۳)$$

تحلیل کمانش

در این مطالعه ورق مستطیلی با طـول a و عـرض b تحت نیروهـای درون صـفحه‌ای در نظـر گرفتـه شـده است. نیروهای پیش کمانش با استفاده از شرایط تعادل به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} N^0_{xx} &= \varsigma_1 P_1 \\ N^0_{yy} &= \varsigma_2 P_1 \\ N^0_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (۲٤)$$

که در آن P_1 نیرو بر واحد طول می‌باشد و ς_1 و ς_2 پارامترهای نیرو هستند که به‌ترتیب شـرایط بارگـذاری در راسـتای محـور x و y را توصـیف مـی‌کننـد. $R = \varsigma_2 / \varsigma_1$ نیز نسبت نیروست که برای مقـادیر ۰، ۱ و ۱- به‌ترتیب بیانگر بارگذاری تـک محـوره، دو محـوره فشاری و دو محورهٔ فشاری کششی می‌باشـد. از آن‌جـا که ورق در دو لبه در راستای y تکیه‌گاه گیردار است، تغییر مکان عرضی ورق w با سری زیر می‌تواند بیـان شود:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (۲۵)$$

بـا قـرار دادن (۲۵) در (۱۹) معادلـهٔ دیفرانسـیل معمولی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\eta_1 \frac{d^6}{dy^6} f(y) \\ &+[-3\eta_1\beta^2 + \eta_3 N^0_{yy} + \eta_2] \frac{d^4}{dy^4} f(y) \\ &+[3\eta_1\beta^4 - 2\eta_2\beta^2 + N^0_{yy} \\ &-\eta_3\beta^2(N^0_{xx} + N^0_{yy})] \frac{d^2}{dy^2} f(y) \\ &+\left(\eta_2\beta^4 - \eta_1\beta^6 - N^0_{xx}\beta^2 + \eta_3 N^0_{xx}\beta^4\right) f(y) = 0 \end{aligned} \quad (۲٦)$$

کـه در آن $\beta = \frac{m\pi x}{a}$ اسـت. حـل کلـی معادلـهٔ بـالا به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} f(y) &= C_1 \sinh(\lambda_1 y) + C_2 \cosh(\lambda_1 y) \\ &+ C_3 \sinh(\lambda_2 y) + C_4 \cosh(\lambda_2 y) \\ &+ C_5 \sinh(\lambda_3 y) + C_6 \cosh(\lambda_3 y) \end{aligned} \quad (۲۷)$$

کـه در آن $C_i (i = 1,...,6)$ ثوابـت مجهـول هسـتند. $\lambda_i \ (i = 1,2,3)$ نیز در [8] داده شده‌اند. بـه ایـن نکتـه باید توجه کرد که حل عمومی معادلهٔ (۲۷) برای مقادیر حقیقی λ_i معتبر هستند و بـرای مقـادیر موهـومی آن باید sin و cos به‌ترتیـب جـایگزین sinh و cosh شوند. با در نظر گرفتن دو شرط مرزی مکانیکی و یک شرط مرزی الکتریکی روی لبه‌هـای ورق، مجموعـه‌ای از معادلات جبری همگـن حاصـل مـی‌شـوند کـه بـار بحرانـی کمـانش بـا برابـر صـفر قـرار دادن دترمینـان ماتریس ضرایب C_i به‌دست می‌آید.

بحث و بررسی نتایج عددی

جهت بررسی صحت حل صورت گرفته، با ناچیز قرار دادن ضخامت لایۀ پیزوالکتریک و صفر قرار دادن اندیس مادۀ هدفمند، نتایج حاصل با نتایج موجود در تحلیل محمدی و همکاران [8] مقایسه گردید (جدول ۱). از سوی دیگر تنها با صفر قرار دادن ضخامت لایۀ پیزوالکتریک، حالت‌های گوناگون قرارگیری فلز و مادۀ هدفمند با نتایج موجود در تحلیل زنکور [11] مورد ارزیابی قرار گرفت (جدول ۲). هم‌خوانی خوب مقادیر عددی ارائه شده در جدول‌های (۲ و ۱)، صحت تحلیل صورت گرفته را تأیید می‌نماید. برای ارائۀ نتایج عددی، از خواص $PZT-4$ که در جدول (۳) ذکر گردیده استفاده شده است. علاوه بر این برای تعیین نتایج عددی حالت ۱-۲-۱ در نظر گرفته شده است که به معنای آن است که ضخامت قسمت مادۀ هدفمند بالا و پایین برابر است و ضخامت لایۀ فلز دو برابر هر یک از آنهاست.

همچنین حالت ۲-۱-۲ بدین معناست که ضخامت مادۀ هدفمند لایۀ بالا و پایین یکسان است و دو برابر ضخامت لایۀ فلز می‌باشد. مدول الاستیسیته قسمت فلز از جنس آلومینیوم با مدول $70GPa$ و مدول الاستیسیتۀ فلز و سرامیک مادۀ هدفمند به‌ترتیب $70GPa$ و $380GPa$ در نظر گرفته شده است. ضریب پواسون در کل ضخامت ثابت و برابر $\upsilon=0.3$ انتخاب شده است. در همۀ ترسیمه‌ها، بار بحرانی کمانش ورق مربعی به طول ضلع ۱ متر و ضخامت ورق هدفمند ۰.۰۱ متر برای حالت ۲-۱-۲ برحسب نسبت ضخامت لایۀ پیزوالکتریک به ضخامت مادۀ هدفمند با اندیس ۲ در حالت مدار باز رسم شده است (مگر در مواردی که خلاف آن ذکر شده باشد).

در شکل (۲) تحت شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار-گیردار، تغییرات بار بحرانی کمانش برای شرایط مدار باز و بسته مورد مقایسه قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که در ضخامت معین لایۀ پیزوالکتریک، بار بحرانی کمانش برای مدار باز بیشتر از مدار بسته است. همچنین، با افزایش ضخامت لایۀ پیزوالکتریک برای هر دو حالت مدار باز و بسته، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

برای مواد پیزوالکتریک مختلف، بار بحرانی کمانش برحسب نسبت ضخامت پیزوالکتریک به مادۀ هدفمند، در شکل (۳) رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که بیشترین و کمترین مقدار بار بحرانی کمانش به‌ترتیب مربوط به PZT-5A و PZT-6B می‌باشد.

جدول ۱ مقایسۀ نتایج حاصل با نتایج موجود در تحلیل محمدی و همکاران [8]

n	a/b	$2h_p/a$	R = 1	R = 0	R = -1
SSSC	0.5	[8]	1.84256	2.35369	3.22520
		Closed	1.84370	2.35515	3.22720
		Open	1.84400	2.35553	3.22772
	1	[8]	0.91450	1.97146	3.22520
		Closed	0.91506	1.97268	3.22720
		Open	0.91521	1.97300	3.22772
	1.5	[8]	0.77870	1.86533	3.22520
		Closed	0.77918	1.86648	3.22720
		Open	0.77931	1.86678	3.22772
SSSF	0.5	[8]	1.36347	1.49598	1.61262
		Closed	1.36432	1.49691	1.61361
		Open	1.36445	1.49711	1.61385
	1	[8]	0.36238	0.48137	0.66578
		Closed	0.36261	0.48167	0.66620

		Open	0.36264	0.48172	0.66628
	1.5	[8]	0.17213	0.29459	0.75284
		Closed	0.17224	0.29478	0.75331
		Open	0.17225	0.29480	0.75340
SCSF	0.5	[8]	1.37663	1.53290	1.66765
		Closed	1.37749	1.53385	1.66868
		Open	1.37763	1.53405	1.66893
	1	[8]	0.39275	0.56755	0.85305
		Closed	0.39200	0.56790	0.85358
		Open	0.39302	0.56796	0.85369
	1.5	[8]	0.21682	0.44346	0.98636
		Closed	0.21696	0.44374	0.98697
		Open	0.21697	0.44377	0.98710

جدول ۲ مقایسهٔ نتایج حاصل با نتایج موجود در تحلیل زنکور [11]

n		P_{cr}			
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1
0	[11]	6.86896	6.86896	6.86896	6.86896
	Open	6.86593	6.86593	6.86593	6.86593
	Closed	6.86571	6.86571	6.86571	6.86571
0.5	[11]	3.82699	4.12798	4.39032	4.80762
	Open	3.82577	4.12659	4.38877	4.80582
	Closed	3.82555	4.12637	4.38855	4.80561
1	[11]	2.66624	3.01366	3.34075	3.89203
	Open	2.66572	3.01294	3.33983	3.89078
	Closed	2.66550	3.01271	3.33961	3.89057
5	[11]	1.36540	1.55352	1.82866	2.42859
	Open	1.36565	1.55367	1.82864	2.42820
	Closed	1.36543	1.55344	1.82841	2.42798
10	[11]	1.28493	1.40170	1.62962	2.19111
	Open	1.28523	1.40194	1.62972	2.19087
	Closed	1.28501	1.40171	1.62949	2.19065

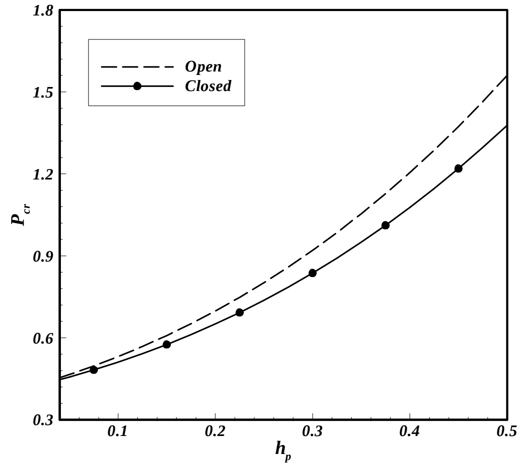
جدول ۳ خواص مواد مختلف پیزوالکتریک

materials	Elastic constants (GPa)					Electric constants (C/m^2)			Dielectric constants (C/Vm)	
	C_{11}^E	C_{33}^E	C_{55}^E	C_{12}^E	C_{13}^E	e_{33}	$-e_{31}$	e_{15}	Ξ_{11}	Ξ_{33}
PZT-4	132	115	26	71	73	14.1	4.1	10.5	7.124e-9	5.841 e-9
PZT-5A	121	111	21.1	75.9	75.4	15.8	5.4	12.3	8.11 e-9	7.35 e-9
PZT-6B	168	163	35.5	84.7	84.2	7.10	0.9	4.60	3.60 e-9	3.42 e-9
PZT-7A	148	131	25.3	76.1	81.3	9.50	2.1	9.20	4.07 e-9	2.08 e-9
PZT-8	137	123	31.3	69.9	71.1	17.5	4.0	10.4	7.97 e-9	5.14 e-9

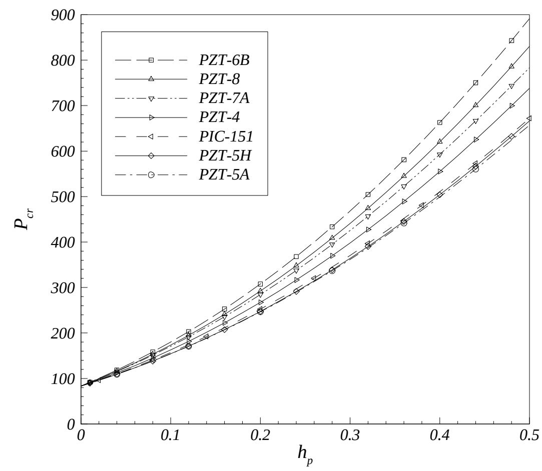
به‌منظور مقایسهٔ اثر شرط مرزی مکانیکی بر روی بار بحرانی کمانش، اشکال (٤-الف و ب) و (٥-الف و ب) به‌ترتیب برای مدار بسته و باز رسم شده‌اند. با مقایسهٔ این شکل‌ها مشخص می‌شود که برای هر دو حالت مدار باز و بسته قید قوی‌تر روی شرط مرزی منجر به بار بحرانی کمانش بیشتر می‌شود.

این مطلب بدین معناست که می‌توان ترتیب صعودی بار بحرانی کمانش مرتبط با شرایط مرزی را به‌صورت SFSF ، SFSS، SFSC، SSSS، SCSS و SCSC بیان کرد. در شکل (٦ -الف و ب) بار بحرانی کمانش ورق برای توان‌های مختلف مادهٔ هدفمند به‌ترتیب برای مدار بسته و باز رسم شده است همان‌گونه که مشخص است برای هر دو شرط مرزی الکتریکی، با افزایش اندیس مادهٔ هدفمند، مقدار بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

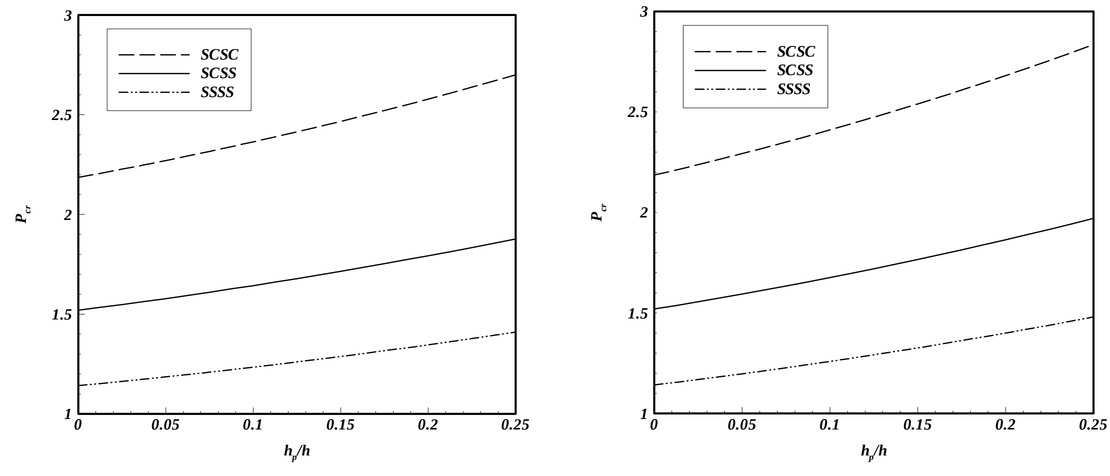
هم‌چنین تغییرات بار بحرانی برای مقادیر کوچک اندیس مادهٔ هدفمند در مقایسه با مقادیر بزرگ‌تر قابل ملاحظه می‌باشد.



شکل ۲ بار بحرانی کمانش ورق SCSC برحسب نسبت ضخامت

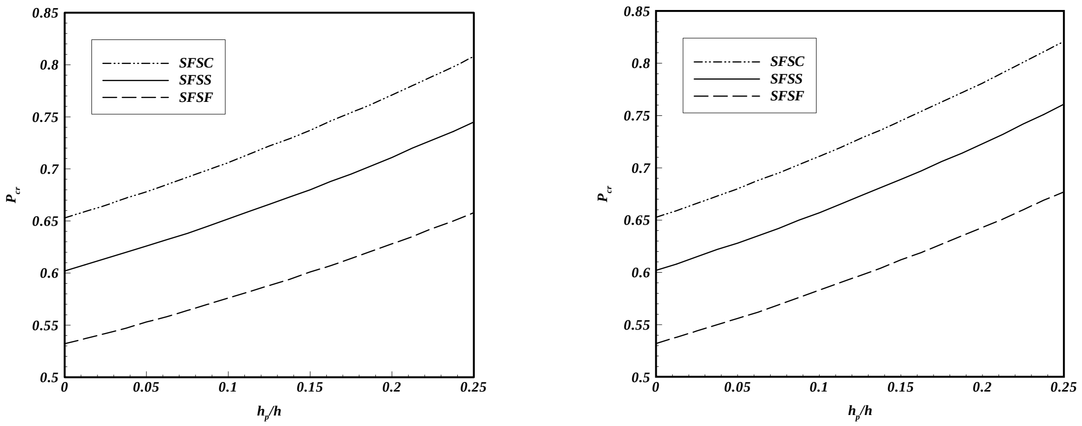


شکل ۳ بار بحرانی کمانش ورق SSSS برحسب نسبت ضخامت



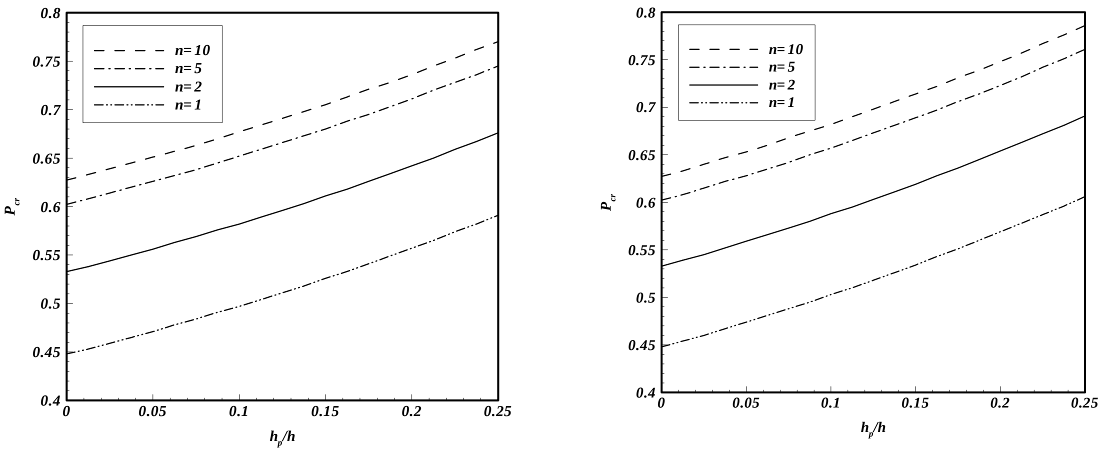
(الف)   (ب)

شکل ٤ بار بحرانی کمانش برحسب نسبت ضخامت (الف: مدار باز ب: مدار بسته)



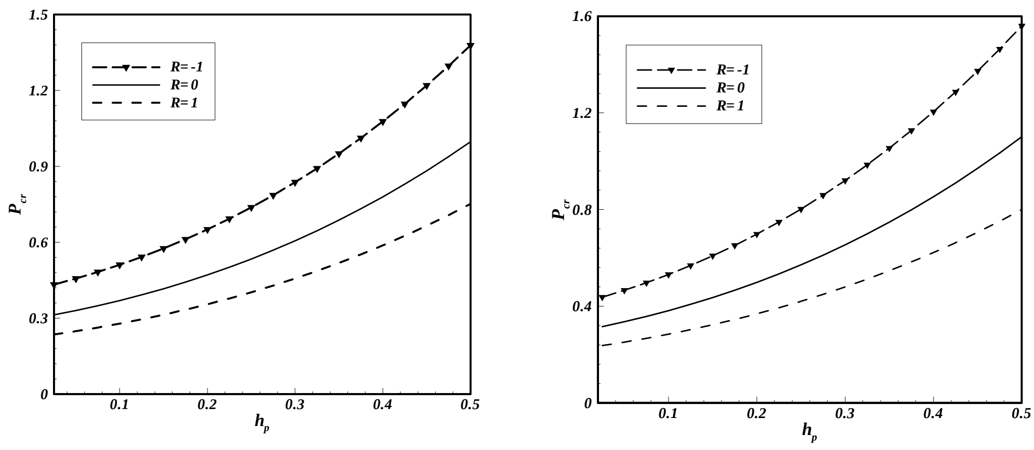
(الف) (ب)

شکل ۵ بار بحرانی کمانش برحسب نسبت ضخامت (الف: مدار باز، ب: مدار بسته)



(الف) (ب)

شکل ٦ بار بحرانی کمانش ورق SCSC برحسب نسبت ضخامت (الف: مدار باز، ب: مدار بسته)



(الف) (ب)

شکل ۷ بار بحرانی کمانش ورق SCSC برحسب نسبت ضخامت (الف: مدار بسته، ب: مدار باز)

جدول ٤ بار بحرانی بدون بعد کمانش تکیه‌گاه گیردار- گیردار

n	R	h_p/a		$\frac{a}{b}=0.5$	$\frac{a}{b}=1$
1	0	0.2	Closed	18.9802	75.9206
			Open	18.8967	75.5866
		0.1	Closed	18.9779	75.9115
			Open	18.9550	75.8199
	-1	0.2	Closed	26.6219	106.4876
			Open	26.5048	106.0190
		0.1	Closed	26.6187	106.4747
			Open	26.5866	106.3463
	1	0.2	Closed	14.6195	37.8050
			Open	14.5552	37.6386
		0.1	Closed	14.6178	37.8004
			Open	14.6002	37.7548
2	0	0.2	Closed	18.9798	75.9192
			Open	18.9069	75.6275
		0.1	Closed	18.9779	75.9113
			Open	18.9582	75.8328
	-1	0.2	Closed	26.6214	106.4856
			Open	26.5192	106.0764
		0.1	Closed	26.6186	106.4744
			Open	26.5911	106.3643
	1	0.2	Closed	14.6193	37.8043
			Open	14.5631	37.6590
		0.1	Closed	14.6177	37.8003
			Open	14.6026	37.7612

جدول ٥ بار بحرانی بدون بعد کمانش تکیه‌گاه گیر دار- ساده

n	R	h_p/a		$\frac{a}{b}=0.5$	$\frac{a}{b}=1$
1	0	0.2	Closed	16.9119	56.6616
			Open	16.8375	56.4123
		0.1	Closed	16.9098	56.6547
			Open	16.8894	56.5864
	-1	0.2	Closed	23.1738	92.7465
			Open	23.0719	92.2873
		0.1	Closed	23.1710	92.6990
			Open	23.1431	92.5722
	1	0.2	Closed	13.2392	26.2835
			Open	13.1810	26.1679
		0.1	Closed	13.2376	26.2803
			Open	13.2217	26.2486
2	0	0.2	Closed	16.9115	56.6538
			Open	16.8466	56.4428
		0.1	Closed	16.9098	56.6546
			Open	16.8923	56.5960
	-1	0.2	Closed	23.1734	92.7188
			Open	23.0844	92.3372
		0.1	Closed	23.1709	92.6886
			Open	23.1470	92.5879
	1	0.2	Closed	13.2390	26.2830
			Open	13.1881	26.1820
		0.1	Closed	13.2376	26.2802
			Open	13.2239	26.2531

جدول ٦ بار بحرانی بدون بعد کمانش تکیه‌گاه ساده- ساده

n	R	h_p/a		$\frac{a}{b}=0.5$	$\frac{a}{b}=1$
1	0	0.2	Closed	15.4320	39.5059
			Open	15.3556	39.3103
		0.1	Closed	15.4241	39.4857
			Open	15.4030	39.4316
	-1	0.2	Closed	20.5760	82.3039
			Open	20.4741	81.8964
		0.1	Closed	20.5655	82.2618
			Open	20.5373	82.1492
	1	0.2	Closed	12.3456	19.7530
			Open	12.2845	19.6552
		0.1	Closed	12.3393	19.7429
			Open	12.3224	19.7158
2	0	0.2	Closed	15.4274	39.4941
			Open	15.3639	39.3316
		0.1	Closed	15.4224	39.4813
			Open	15.4056	39.4383
	-1	0.2	Closed	20.5699	82.2793
			Open	20.4852	81.9407
		0.1	Closed	20.5632	82.2526
			Open	20.5408	82.1631
	1	0.2	Closed	12.3419	19.7471
			Open	12.2912	19.6658
		0.1	Closed	12.3379	19.7407
			Open	12.3245	19.7192

جدول ٧ بار بحرانی بدون بعد کمانش تکیه‌گاه گیردار- آزاد

n	R	h_p/a		$\frac{a}{b}=0.5$	$\frac{a}{b}=1$
1	0	0.2	Closed	11.0211	16.3336
			Open	10.8627	15.9237
		0.1	Closed	11.0165	16.3213
			Open	10.9475	16.1279
	-1	0.2	Closed	11.9872	24.5347
			Open	11.8588	24.1594
		0.1	Closed	11.9835	24.5236
			Open	11.9306	24.3566
	1	0.2	Closed	9.9044	11.3121
			Open	9.6513	10.8923
		0.1	Closed	9.8971	11.2994
			Open	9.7791	11.0945
2	0	0.2	Closed	11.0200	16.3304
			Open	10.8825	15.9739
		0.1	Closed	11.0160	16.3196
			Open	10.9571	16.1543
	-1	0.2	Closed	11.9864	24.5320
			Open	11.8747	24.2053
		0.1	Closed	11.9831	24.5223
			Open	11.9379	24.3794
	1	0.2	Closed	9.9025	11.3087
			Open	9.6831	10.9432
		0.1	Closed	9.8961	11.2975
			Open	9.7954	11.1222

به‌منظور مطالعهٔ اثر شرایط بارگذاری بر روی بار کمانش بحرانی در دو حالت مدار بسته و باز شکل‌های (۷– الف و ب) به‌ترتیب رسم شده است.

جدول ۸ بار بحرانی بدون بعد کمانش تکیه‌گاه ساده– آزاد

n	R	h_p/a		$\frac{a}{b}=0.5$	$\frac{a}{b}=1$
1	0	0.2	Closed	10.7549	13.8508
			Open	10.6110	13.5443
		0.1	Closed	10.7508	13.8417
			Open	10.6890	13.6993
	-1	0.2	Closed	11.5913	19.1486
			Open	11.4725	18.8552
		0.1	Closed	11.5879	19.1399
			Open	11.5395	19.0095
	1	0.2	Closed	9.8086	10.4342
			Open	9.5744	10.0932
		0.1	Closed	9.8018	10.4240
			Open	9.6938	10.2598
2	0	0.2	Closed	10.7540	13.8485
			Open	10.6290	13.5820
		0.1	Closed	10.7503	13.8405
			Open	10.6975	13.7188
	-1	0.2	Closed	11.5905	19.1464
			Open	11.4873	18.8912
		0.1	Closed	11.5875	19.1388
			Open	11.5462	19.0274
	1	0.2	Closed	9.8068	10.4315
			Open	9.6040	10.1350
		0.1	Closed	9.8009	10.4225
			Open	9.7088	10.2822

بیشترین و کمترین مقدار بار بحرانی کمانش برای هر دو حالت مدار باز و بسته مربوط به بارگذاری دو محوره فشاری-کششی و دو محوره فشاری می باشد.

در جداول (۹-٤) نیز بار بحرانی کمانش برای شرایط مرزی متقارن و نامتقارن در حل لوی و شرایط بارگذاری گوناگون آورده شده‌اند. از نتایج جداول ذکر شده می توان به افزایش بار بحرانی کمانش با عواملی همچون افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک، تغییر شرط مرزی الکریکی از حالت مدار بسته به حالت مدار باز، قید قوی تر روی شرط مرزی مکانیکی، افزایش اندیس ماده هدفمند اشاره نمود.

جدول ۹ بار بحرانی بدون بعد کمانش تکیه‌گاه آزاد– آزاد

n	R	h_p/a		$\frac{a}{b}=0.5$	$\frac{a}{b}=1$
1	0	0.2	Closed	9.6074	9.4081
			Open	9.4928	9.2414
		0.1	Closed	9.6107	9.4032
			Open	9.5576	9.3284
	-1	0.2	Closed	9.6735	9.5027
			Open	9.5802	9.3632
		0.1	Closed	9.6762	9.4987
			Open	9.6348	9.4376
	1	0.2	Closed	9.4057	9.2131
			Open	9.2194	8.9913
		0.1	Closed	9.4111	9.2067
			Open	9.3190	9.1036
2	0	0.2	Closed	9.6070	9.4069
			Open	9.5076	9.2622
		0.1	Closed	9.6099	9.4026
			Open	9.5645	9.3387
	-1	0.2	Closed	9.6732	9.5017
			Open	9.5922	9.3806
		0.1	Closed	9.6756	9.4982
			Open	9.6401	9.4461
	1	0.2	Closed	9.4050	9.2115
			Open	9.2439	9.0191
		0.1	Closed	9.4097	9.2058
			Open	9.3311	9.1178

نتیجه‌گیری

در مقالهٔ حاضر تحلیل کمانش ورق‌های هدفمند ساندویچی مستطیلی کوپله با لایه‌های پیزوالکتریک با تئوری کلاسیک ورق و اعمال شرایط مرزی لوی و تحت شرایط الکتریکی مدار باز و بسته مورد بررسی قرار گرفته است. مطالعهٔ انجام شده نشان داد که بار بحرانی کمانش در حالت مدار باز، در همهٔ حالات بارگذاری و شرایط مرزی از مقدار مربوط به مدار بسته بیشتر است. هم‌چنین به‌عنوان نتیجهٔ مهم دیگر می‌توان به افزایش بار بحرانی کمانش با افزایش ضخامت لایهٔ پیزوالکتریک اشاره کرد. کاهش بار بحرانی کمانش در اثر کاهش قیود مکانیکی بر روی مرزها و کاهش اندیس مادهٔ هدفمند نیز از دیگر نتایج این مطالعه است.

مراجع

1 Javaheri, R. and Eslami, M.R.," Thermal buckling of functionally graded plates", *AIAA Journal*, Vol. 40, pp. 162-169, (2002).

2 Javaheri, R. and Eslami, M.R.," Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading", *Z Angew Math Mech (ZAMM)*, Vol. 82(4), pp. 277-283, (2002).

3 Javaheri, R. and Eslami, M.R., " Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory ", *Journal of Thermal Stress*, Vol. 25, pp. 603-625, (2002).

4 Wu, L., "Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate", *Composite Structures*, Vol. 64, pp. 211-218, (2004).

5 Shariat, S. and Eslami, M.R., "Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading based on the first order plate theory", *Fifth international conference on composite science and technology*, Sharjah, UAE, (2005).

6 Shariat, S. and Eslami, M.R., "Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads", *Composite Structures*, Vol. 78, pp. 433-439, (2005).

7 Ferreira, A.J.M., Batra, R.C., Roque, C.M.C., Qian, L.F. and Martins, P., "Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method", *Composite Structures*, Vol. 69, pp. 449-457, (2005).

8 Mohammadi, M., Saidi, A.R. and Jomehzadeh, E., "Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates", *Applied Composite Materials*, Vol. 17, pp. 81-93, (2010).

9 Mohammadi, M., Saidi, A.R. and Jomehzadeh, E., "A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges", *Mechanical Engineering Science*, Vol. 224, pp. 1831-1841, (2009).

10 Bodaghi, M. and Saidi, A.R., " Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, pp. 3659-3673, (2010).

11 Zenkour, A.M., "A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2—Buckling and free vibration", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 5243–5258, (2005).

12 Kiani, Y. and Eslami, M.R., "Thermal buckling and post-buckling response of imperfect temperature-dependent sandwich FGM plates resting on elastic foundation", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 82, pp. 891–905, (2012).

13 Chandrashekhara, K. and Bhatia, K., "Active buckling control of smart composite plates- finite element analysis", *Smart Mater Struct*, Vol. 2, pp. 31-39, (1993).

14 Batra, R.C. and Geng, T.S., "Enhancement of the dynamic buckling load for a plateby usingpiezoceramic actuators", *Smart Mater Struct*, Vol. 10, pp. 925-933, (2001).

15 Varelis, D. and Saravanos, D.A., "Coupled buckling and postbuckling analysis of active laminated piezoelectric composite plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 1519–1538, (2004).

16 Shariyat, M., "Dynamic buckling of imperfect laminated plates with piezoelectric sensors and actuators subjected to thermo-electro-mechanical loadings, considering the temperature dependency of the material properties", Composite Structures, Vol. 88, pp. 228-239, (2009).

17 Shariyat, M., "Vibration and dynamic buckling control of imperfect hybrid FGM plates with temperature-dependent material properties subjected to thermo-electro-mechanical loading conditions", *Composite Structures*, Vol. 88, pp. 240–252, (2009).

18 Akhras, G. and Li, W.C., "Three-dimensional thermal buckling analysis of piezoelectric antisymmetric angle-ply laminates using finite layer method", *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 31-38, (2010).

19 Yang, J.S., "Buckling of piezoelectric plate", *Applied Electromagnetics and mechanics*, Vol. 9, pp. 399-408, (1998).

20 Shen, H.S., "Postbuckling of FGM plates with piezoelectric actuators under thermo-electro-mechanical loadings", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 6101–6121, (2005).

21 Shen, H.S., "A comparison of buckling and postbuckling behavior of FGM plates with piezoelectric fiber reinforced composite actuators", *Composite Structures*, Vol. 91, pp. 375–384, (2009).

22 Shen, H.S., "Postbuckling of shear deformable laminated plateswith piezoelectric actuators under complex loading conditions", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 7703-7721, (2001).

23 Shen, H.S., "Thermal postbuckling of shear-deformable laminated plates with piezoelectric actuators", *Composites Science and Technology*, Vol. 61, pp. 1931-1943, (2001).

24 Kapuria, S. and Achary, G.G.S., "Nonlinear coupled zigzag theory for buckling of hybrid piezoelectric plates", *Composite Structures*, Vol. 74, pp. 253-264, (2006).

25 Kim, G.W. and Lee, K.Y., "Influence of weak interfaces on buckling of orthotropic piezoelectric rectangular laminates", *Composite Structures*, Vol. 82, pp. 290-294, (2008).

26 Liu, X., Wang, Q. and Quek, S.T., "Analytical solution for free vibration of piezoelectric coupled moderately thick circular plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 2129–2151, (2002)

27 Wang, Q., Quek, S.T., Sun, C.T. and Liu, X., "Analysis of piezoelectric coupled circular plate", *Smart Mater. Struct.*,Vol. 10, pp. 229–239, (2001).

پیوست

ثوابت مربوط به مادهٔ هدفمند

$$A_i^T = A_i^H + A_i^{ft} + A_i^{fb} + A_i^{pt} + A_i^{pb}$$
$$(i = 11, 12, 22)$$

$$A_{11}^H = \frac{2E_m h_H}{1-\nu^2}$$

$$A_{12}^H = \frac{E_m h_H}{1+\nu}$$

$$A_{22}^H = \frac{2\nu E_m h_H}{1-\nu^2}$$

$$A_{11}^{ft} = \int_{h_H}^{h} \frac{E^t(z)}{1-\nu^2} dz.$$

$$A_{22}^{ft} = \int_{h_H}^{h} \frac{\nu E^t(z)}{1-\nu^2} dz$$

$$A_{12}^{ft} = \int_{h_H}^{h} \frac{E^t(z)}{2(1+\nu)} dz$$

$$A_{11}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{E^b(z)}{1-\nu^2} dz$$

$$A_{22}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{\nu E^b(z)}{1-\nu^2} dz$$

$$A_{12}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{E^b(z)}{2(1+\nu)} dz$$

$$D_{11}^H = \frac{2E_m h_H^3}{3(1-\nu^2)}$$

$$D_{22}^H = \frac{2\nu E_m h_H^3}{3(1-\nu^2)}$$

$$D_{12}^H = \frac{E_m h_H^3}{3(1+\nu)}$$

$$D_{11}^{ft} = \int_{h_H}^{h} \frac{E^t(z)}{1-\nu^2} z^2 dz$$

$$D_{22}^{ft} = \int_{h_H}^{h} \frac{\nu E^t(z)}{1-\nu^2} z^2 dz$$

$$D_{12}^{ft} = \int_{h_H}^{h} \frac{E^t(z)}{2(1+\nu)} z^2 dz$$

$$D_{11}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{E^b(z)}{1-\nu^2} z^2 dz$$

$$D_{22}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{\nu E^b(z)}{1-\nu^2} z^2 dz$$

$$D_{12}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{E^b(z)}{2(1+\nu)} z^2 dz$$

ثوابت مربوط به لایهٔ پیزوالکتریک

مدار باز

$$X_i^T = X_i^{pt} + X_i^{pb} \qquad (i = 11, 22)$$

$$A_{11}^{pt} = \bar{C}_{11} h_p + \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{\bar{\Xi}_{33}}$$

$$A_{11}^{pb} = \bar{C}_{11} h_p + \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{\bar{\Xi}_{33}}$$

$$A_{22}^{pt} = \bar{C}_{12} h_p + \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{\bar{\Xi}_{33}}$$

$$A_{22}^{pb} = \bar{C}_{12} h_p + \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{\bar{\Xi}_{33}}$$

$$A_{12}^{pt} = \frac{1}{2}\left(\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}\right) h_p$$

$$A_{12}^{pb} = \frac{1}{2}\left(\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}\right) h_p$$

$$D_{11}^{pt} = \frac{\bar{C}_{11}}{3}\left(\left(h+h_p\right)^3 - h^3\right) - \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{2\bar{\Xi}_{33}}\left(h+h_p\right)\left(\left(h+h_p\right)^2 - h^2\right)$$

$$D_{11}^{pb} = \frac{\bar{C}_{11}}{3}\left(\left(h+h_p\right)^3 - h^3\right) - \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{2\bar{\Xi}_{33}}\left(h+h_p\right)\left(\left(h+h_p\right)^2 - h^2\right)$$

$$D_{22}^{pt} = \frac{\bar{C}_{12}}{3}\left(\left(h+h_p\right)^3 - h^3\right) - \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{2\bar{\Xi}_{33}}\left(h+h_p\right)\left(\left(h+h_p\right)^2 - h^2\right)$$

$$D_{22}^{pb} = \frac{\bar{C}_{12}}{3}\left(\left(h+h_p\right)^3 - h^3\right) - \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{2\bar{\Xi}_{33}}\left(h+h_p\right)\left(\left(h+h_p\right)^2 - h^2\right)$$

$$D_{12}^{pt} = \frac{2\bar{C}_{12}}{3}\left(\left(h+h_p\right)^3 - h^3\right)$$

$$D_{12}^{pb} = \frac{2\bar{C}_{12}}{3}\left(\left(h+h_p\right)^3 - h^3\right)$$

$$X_{11}^{pt} = 4\bar{e}_{31}$$

$$X_{22}^{pt} = \frac{4}{3}\bar{e}_{31}\left(3h + h_p\right)$$

مدار بسته

$$A_{11}^{pt} = \bar{C}_{11} h_p$$

$$A_{11}^{pb} = \bar{C}_{11} h_p$$

$$A_{22}^{pt} = \bar{C}_{12} h_p$$

$$A_{22}^{pb} = \bar{C}_{12} h_p$$

$$A_{12}^{pt} = \frac{1}{2}\left(\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}\right) h_p$$

$$A_{12}^{pb} = \frac{1}{2}\left(\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}\right) h_p$$

$$D_{11}^{pt} = \frac{\bar{C}_{11}}{3}\left(\left(h + h_p\right)^3 - h^3\right)$$

$$D_{11}^{pb} = \frac{\bar{C}_{11}}{3}\left(\left(h + h_p\right)^3 - h^3\right)$$

$$D_{22}^{pt} = \frac{\bar{C}_{12}}{3}\left(\left(h + h_p\right)^3 - h^3\right)$$

$$D_{22}^{pb} = \frac{\bar{C}_{12}}{3}\left(\left(h + h_p\right)^3 - h^3\right)$$

$$D_{12}^{pb} = \frac{2\bar{C}_{12}}{3}\left(\left(h + h_p\right)^3 - h^3\right)$$

$$D_{22}^{pt} = \frac{2\bar{C}_{12}}{3}\left(\left(h + h_p\right)^3 - h^3\right)$$

$$X_{11}^{pt} = 0$$

$$X_{22}^{pt} = -\frac{2}{3}\bar{e}_{31} h_p$$

ضرایب معادلهٔ (۱۹)

$$m_1 = -\frac{X^T}{\Theta_4}\left[\frac{\Theta_1 D_{11}^T}{X^T} + \Theta_2\right]$$

$$m_2 = -\left(D_{11}^T + \frac{X^T}{\Theta_4}\Theta_3\right)$$

$$m_3 = \frac{\Theta_1}{\Theta_4}$$